12 משפט Gauss-Bonnet

12.1 זהות Binet-Cauchy

משפט(מקרה 3־מימדי של Binet-Cauchy)

וקטורים $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ מקיימים

$$(a \cdot c)(b \cdot d) = (a \cdot d)(b \cdot c) + (a \times b) \cdot (c \times d)$$

$$\langle a, c \rangle \langle b, d \rangle = \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle + \langle a \times b, b \times d \rangle$$

$$\langle v, w \rangle = \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^3}$$

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$$

מסקנה

יהיו a, b הווקטורים $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ של משטח $\underline{x}\left(u^1, u^2\right)$.
אזי מתקיימת הנוסחה

$$|x_1 \times x_2|^2 = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = \det\left(g_{ij}\right)$$

הוכחה

$$\langle x_i, x_i \rangle = |x_i|^2 = g_{ii}$$

$$\langle x_1, x_2 \rangle = g_{12}$$

$$|x_1 \times x_2| = \sqrt{\det(g_{ij})} = \sqrt{\text{Gram}}$$

12.2 אלמנט שטח(area element) של משטח ושל הספירה

הגדרה

אלמנט שטח של משטח Σ הוא

$$\mathrm{d}A_\Sigma = \sqrt{\det(g_{ij})}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2 = |x_1 \times x_2|\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2$$

כאשר (g_{ij}) הם מקדמים של תבנית יסודית ראשונה של Σ.

תזכורת

אורך של עקומה הוא $\beta = x \circ \alpha$ $\qquad L_p = \int \sqrt{g_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'}}\,\mathrm{d}t$

הגדרה

יהי $\underline{x}(D) \subset \Sigma$ תחום פתוח. השטח שלו הוא

$$\text{area}(\underline{x}(D)) = \iint_D \sqrt{\det(g_{ij})}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2$$

תזכורת

$p = \underline{x}(u^1, u^2)$. הנורמל בנקודה p הוא $n(u^1, u^2)$
הפונקציה N מרחיבה את n לכל המרחב:

$$n(u^1, u^2) = N_{x(u^1,u^2)} = N_p$$

משפט

אם עקמומיות Gauss של Σ היא שונה מאפס בנקודה $p = \underline{x}(u_0^1, u_0^2)$, אזי העתקה $n(u^1, u^2)$ נותנת פרמטריזציה רגולרית של סביבה פתוחה של נקודה $n(u_0^1, u_0^2) \in S^2$.

הערה

$$S^2 = \left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2=1\right\}$$

$n\left(u^1,u^2\right)$ הוא ווקטור יחידה, ולכן ניתן לחשוב עליו בעל נקודה בS^2.

הוכחת המשפט

הפרמטריזציה מוגדרת על ידי ההעתקה $n\left(u^1,u^2\right)$ כלפי הספירה, כאשר היעקוביאן שלה הוא העתקה ווינגארטן:

$$n_j = L^i_j x_i$$

אם $K \neq 0$ אזי $\det\left(L^i_j\right) \neq 0$, לכן $n\left(u^1,u^2\right)$ מגדיר פרמטריזציה רגולרית, מפני שווקטורים n_1, n_2 בת"ל.

משפט

נתבונן בפרמטריזציה $n\left(u^1,u^2\right)$ של סביבה על S^2. אזי אלמנט שטח $\mathrm{d}A_{S^2}$ מתבטא ע"י

$$(*) \qquad \mathrm{d}A_{S^2} = \sqrt{\det\left(\tilde{g}_{ij}\right)}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2 = \left|n_1 \times n_2\right|\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2$$

כאשר $\left(\tilde{g}_{ij}\right)$ הם מקדמים של ת.י.ר. של פרמטריזציה $n\left(u^1,u^2\right)$ של הספירה, $\alpha = 1,2$
$\beta = 1,2$
ואילו $n_j = \frac{\partial n\left(u^1,u^2\right)}{\partial u^j}$, $j = 1,2$.

הוכחה

הנוסחה $(*)$ היא הנוסחה הרגילה לאלמנט שטח ביחס לפרמטריזציה, עם ההבדל שמשתמשים בפרמטריזציה $n\left(u^1,u^2\right)$ במקום סימון רגיל $\underline{x}\left(u^1,u^2\right)$.

הערה

הבדל בין $\mathrm{d}A_\Sigma$ ו$\mathrm{d}A_{S^2}$

$$M = S^2$$

12.3 הוכחת משפט Gauss-Bonnet

- משטח Σ.
  - $\underline{x}\left(u^1,u^2\right)$ פרמטריזציה של Σ

- (g_{ij}) ת.י.ר. של Σ $\begin{array}{l} i=1,2 \\ j=1,2 \end{array}$
- $n\left(u^1,u^2\right)$ נורמל של Σ.

- S^2 ספירת יחיסה

- $n\left(u^1,u^2\right)$ פרמטריזציה של S^2
- $(\tilde{g}_{\alpha,\beta})$ ת.י.ר. של S^2 $\begin{array}{l} \alpha=1,2 \\ \beta=1,2 \end{array}$
- ביחס לפרמטריזציה n על S^2,

$$\tilde{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\tilde{g}_{\alpha\gamma:\beta}-\tilde{g}_{\alpha\beta:\eta}+\tilde{g}_{\beta\gamma:\alpha}\right)\tilde{g}^{\gamma\eta}$$

$$\boxed{K=\tilde{\Gamma}^{x}_{kx:*}}$$

$$K\equiv 1$$

למה

מתקיים

$$\det\left(\tilde{g}_{\alpha\beta}\right)=K\left(u^1,u^2\right)^2\det\left(g_{ij}\right)$$

כאשר $K=K\left(u^1,u^2\right)$ היא עקמומיות Gauss של משטח Σ.

הוכחה

תהי $L=\left(L^i_j\right)$ מטריצה של העתקת Weingarten ביחס לבסיס $(\underline{x}_1,\underline{x}_2)$. לפי הגדרה, $K=\det L$. מקדמים $\left(L^i_j\right)$ מוגדרים ע"י

$$(**)\qquad n_\alpha=L^i_\alpha\underline{x}_i=\underline{x}_iL^i_\alpha$$

נתבונן במטריצות 3×2

$$A=\begin{bmatrix}\underline{x}_1 & \underline{x}_2\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}n_1 & n_2\end{bmatrix}$$

אזי לפי $(**)$,

$$(***)\qquad B=AL$$

נתבונן במטריצת Gram:

$$\mathrm{Gram}\left(n_1,n_2\right)=B^tB=\left(AL\right)^tAL=L^tA^tAL=L^t\mathrm{Gram}\left(x_1,x_2\right)L$$

$$(****)\qquad \mathrm{Gram}\left(n_1,n_2\right)=L^t\mathrm{Gram}\left(x_1,x_2\right)L$$

נישם דטרמיננטה לנוסחה $(****)$:

$$\det\left(\tilde{g}_{\alpha\beta}\right)=\det\left(\mathrm{Gram}\left(n_1,n_2\right)\right)=\underbrace{\det\left(L^t\right)}_{=K}\det\left(\mathrm{Gram}\left(x_1,x_2\right)\right)\underbrace{\det\left(L\right)}_{=K}=K^2\det\left(g_{ij}\right)$$

לפי Binet-Cauchy:

$$\left|n_1\times n_2\right|=\left|K\right|\left|x_1\times x_2\right|$$

$$\det\left(\tilde{g}_{\alpha\beta}\right)=K\left(u^1,u^2\right)^2\det\left(g_{ij}\right)$$

כאשר $K=K\left(u^1,u^2\right)$ היא עקמומיות Gauss של משטח Σ.

משפט(מקרה פרטי של Gauss-Bonnet)

יהי Σ משטח כמור סגור ב$\mathbb{R}^3$ בעקמומיות Gauss K חיובית(כמו אליפסויד).
אזי אינטגרל של עקמומיות K על Σ מקיים

$$\iint_\Sigma K\mathrm{d}A_\Sigma=4\pi$$

הוכחה

הביטוי $K\,\mathrm{d}A_\Sigma$ בקואורדינטות (u_1,u_2) מתבטא ע"י

$$K\left(u^1,u^2\right)\,\mathrm{d}A_\Sigma=K\left(u^1,u^2\right)\underbrace{\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}}_{=\sqrt{\det\tilde{g}_{\alpha\beta}}}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2$$

לכן

$$K\,\mathrm{d}A_\Sigma=\sqrt{\det\tilde{g}_{\alpha\beta}}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2=\mathrm{d}A_{S^2}$$

(ביחס לפרמטריזציה $n\left(u^1,u^2\right)$)
לכן

$$\int_\Sigma K\,\mathrm{d}A_\Sigma=\int_{S^2}\mathrm{d}A_{S^2}=\mathrm{area}\left(S^2\right)=4\pi$$

12.4 דואליות באלגברה לינארית

V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$

דוגמאות:

- $\mathbb{R}^n$
- מישור משיק T_pM של משטח M בנקודה $p \in M$.

הגדרה

תבנית לינארית(או 1־תבנית) על V היא העתקה לינארית

- נסמן ב$\mathrm{d}x$ את 1־תבנית $\mathrm{d}x\left(v\right) = v^1$
- נסמן ב$\mathrm{d}y$ את 1־תבנית $\mathrm{d}y\left(v\right) = v^2$

$\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ תבניות לינאריות

הגדרה

$\mathrm{d}x^2, \mathrm{d}y^2$ תבניות ריבועיות.

$$\mathrm{d}x^2\left(v\right) = \left(v^1\right)^2$$

$$\mathrm{d}y^2\left(v\right) = \left(v^2\right)^2$$

נשים לב: יש כאן גם אינדקס עליון של אלמנט בווקטור, וגם אינדקס עליון של חזקה.
שריבוע של 1־תבנית נקרא תבנית ריבועית בדרגה $\mathrm{rank} = 1$.

הגדרה

מרחב דואלי V^* של V הוא מרחב המכיל את כל 1־תבניות על V:

$$V^* = \{\phi | \phi \text{ is 1-form on } V\}$$

הגדרה

העתקת evaluation היא זיווג בין V לV^*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V^* \to \mathbb{R}$$

לכל $x \in V$, לכל $y \in V^*$

$$\langle x, y \rangle = y(x) \in \mathbb{R}$$

הגדרה

נניח שיש בסיס $(x_i) = (x_1, x_2, \dots x_n)$ למרחב V. אזי גם למרחב V^* יש בסיס יחיד:

$$(y_j) = (y_1, y_2, \dots y_n)$$

המקיים

$$\langle x_i, y_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & j \neq j \end{cases}$$

דוגמה

$\mathbb{R}^2$, בסיס (e_1, e_2), $V = \mathbb{R}^2$. איזה בסיס יש לV^*?
לV^* יש בסיס $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$.

12.5 דואליות באינפי

E מרחב אוקלידי ממימד n. $p \in E$ נקודה קבועה.

הגדרה

יהי

$$\mathbb{D}_p = \{f | f \in C^\infty\}$$

מרחב של כל הפונקציות הגזירות אינסוף פעמים בסביבה של p.

משפט

נגזרת חלקית $\frac{\partial}{\partial u^i}$ בנקודה p היא 1־תבנית

$$\frac{\partial}{\partial u^i} : \mathbb{D}_p \to \mathbb{R}$$

על מרחב $\mathbb{D}_p$ המקיים את כלל Leibniz

$$\left.\frac{\partial (fg)}{\partial u^i}\right|_p = \left.\frac{\partial f}{\partial u^i}\right|_p g(p) + f(p) \left.\frac{\partial g}{\partial u^i}\right|_p$$

$$\frac{\partial}{\partial u^i}(fg) = \frac{\partial}{\partial u^i}(f) \cdot g + f \cdot \frac{\partial}{\partial u^i}(g)$$

(הכל בנקודה p)

הגדרה

דריבציה(Derivation) על $\mathbb{D}$ היא 1־תבנית לינארית X

$$X : \mathbb{D}_p \to \mathbb{R}$$

על מרחב $\mathbb{D}_p$ המקיימת את כלל ליבניץ

$$\boxed{X(fg) = X(f)\, g(p) + f(p)\, X(g)}$$

משפט

<u>מרחב של דריבציות</u> בp הוא מרחב וקטורי <u>במימד n</u> הנקרא מרחב משיק $T_p = T_pE$ בנקודה $p \in E$.